Critère de Sylvester pour la signature

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
— 152 : Déterminant. Exemples et applications.
— 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
— 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit A une matrice symétrique (de mineurs non nuls) de taille n. Notons Δ_k le mineur principal de taille k de M.*

(i) M est définie positive $\iff \forall k \in [\![1, n]\!], \Delta_k > 0$

(ii) En posant
- $\varepsilon_k = \frac{\Delta_k}{|\Delta_k|}$ *(signe de Δ_k)*
- $\sigma_k = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}} \in \{\pm 1\}$ *(changement de signe entre Δ_{k-1} et Δ_k)*

La signature de M est (r, s) où r est le nombre de 1 et s est le nombre de -1 de la suite (σ_k).

Preuve :

(i) On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et q la forme quadratique associé à M : on a pour tout $X \in \mathbb{R}^n, q_M(X) = {}^tXMX$.

($\Longleftarrow$) Si q est définie positive, il en est de même que $q_{|\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Or, la matrice extraite M_k obtenue en extrayant les k premières lignes et les k premières colonnes est la matrice de cette restriction, donc $\Delta_k > 0$.

($\Longrightarrow$) : On procède par récurrence sur n,
- Le résultat est vrai pour $n = 1$,
- Supposons $n \geq 2$, tel que $\forall k \in [\![1, n]\!], \Delta_k > 0$, par hypothèse de récurrence, $q_{|\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_{n-1})}$ est définie positive.

  Soit $G = F^\perp$,

  Comme q est non dégénérée (car $\det M = \Delta_n > 0$), sa dimension est 1.

  Si $x \in F \cap G$, x est isotrope donc nul car q est définie positive sur F, d'où $\mathbb{R}^n = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

  Soit $(e'_1, \ldots, e'_{n-1})$ une base orthonormale de F pour q et ε_n un vecteur non nul de G. En notant P la matrice de passage des e_i aux ε_i, matrice de q_M dans $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$,

$$
{}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & \alpha \end{pmatrix}
$$

  En appliquant le déterminant à cette relation, on a $\alpha = (\det P)^2(\det M) = (\det P)\Delta_n > 0$ donc q_A est définie positive donc M est définie positive.

(ii) On procède par récurrence sur n,

— Pour $n=1$, on a $M=(\Delta_1)$ donc $\sigma_1 = \text{signe}(\Delta_1)$ d'où $\text{sgn}(M)=(1,0)$ ou $\text{sgn}(M)=(0,1)$ selon le signe de M.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$,
La sous-matrice M_{n-1} est symétrique de signature (r_{n-1}, s_{n-1}). Considérons $H=\text{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1})$,
Il existe $P_{n-1} \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP_{n-1}M_{n-1}P_{n-1} = \begin{pmatrix} I_{r_{n-1}} & 0 \\ 0 & -I_{s_{n-1}} \end{pmatrix}$ et donc on a $\varepsilon_{n-1} = (-1)^{s_{n-1}}$.
Avec $(e'_1,\dots,e'_{n-1})$ la base orthonormalisée de H, comme Δ_{n-1} est non nul, $q_{|H}$ est non dégénérée d'où $\mathbb{R}^n = H \oplus \mathbb{R}e'_n$ d'où la matrice de q dans la base $(e'_1,\dots,e'_n)$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_{r_{n-1}} & & \\ & -I_{s_{n-1}} & \\ & & q(e'_n) \end{pmatrix} = {}^tQ \begin{pmatrix} I_{r_{n-1}} & & \\ & -I_{s_{n-1}} & \\ & & \xi_n \end{pmatrix} Q$$

avec $Q = \begin{pmatrix} I_{r_{n-1}} & & \\ & I_{s_{n-1}} & \\ & & \sqrt{\xi_n q(e'_n)} \end{pmatrix}$ et avec ξ_n le signe de $q(e'_n)$ (non nul).

Ainsi la matrice est congruente à $\begin{pmatrix} I_{r_{n-1}} & & \\ & -I_{s_{n-1}} & \\ & & \xi_n \end{pmatrix}$ de Sylvester donc de déterminant de même signe que Δ_n :

$$(-1)^{s_{n-1}}\xi_n = \varepsilon_n$$

d'où $\varepsilon_{n-1}\xi_n = \varepsilon_n$ et $\xi_n = \delta_n$ d'où le résultat.

□

Application. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un ouvert de* $S_n(\mathbb{R})$

Preuve : On a $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \bigcap_{k=1}^{r} \Delta_k^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$ avec Δ_k l'application donnant mineur de taille k qui est continue par continuité du déterminant. Ainsi, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection finie d'ouverts de $S_n(\mathbb{R})$ □

Références

[1] Philippe Caldero et Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie*. Calvage Mounet, 2019.